תורת הקבוצות, תרגיל 4

1. תהי $(A,<)$ קבוצה סדורה היטב. נגדיר יחס חדש $<$ על A בצורה הבאה: $a > b$ אם ורק אם $b < a$. הוכח, כי אם גם $(A,>)$ הינה קבוצה סדורה היטב אזי הקבוצה A היא סופית.

2. תהי A קבוצה ותהי $(B,<)$ קבוצה סדורה היטב. נניח כי קיימת פונקציה $f : A \to B$ שהיא חח"ע ועל. השתמש בפונקציה f כדי להגדיר סדר טוב על A. הוכח, כי יחס הסדר המתקבל הוא אכן יחס סדר טוב.

3. לפניכם מספר זוגות של קבוצות סדורות. קבעו באילו מן הזוגות הקבוצות הן איזומורפיות והוכיחו זאת:
   א. $(N,<)$ ו- $(Z,<)$ (קבוצות המספרים הטבעיים והשלמים עם הסדר הרגיל).
   ב. $(A = [0, 0.5) \cup (0.5, 1], <)$ ו- $(B = [0, 1], <)$.
   ג. $(Z,<)$ ו- $(Z,>)$ כאשר יחס הסדר $<$ מוגדר כמו בשאלה 1.

4. תהי $(A,<)$ קבוצה סדורה חלקית כך שלכל תת קבוצה לא ריקה של A עם חסם מלעיל יש חסם עליון. הוכח, כי לכל תת קבוצה לא ריקה של A עם חסם מלרע יש חסם תחתון.
(תזכורת: x הינו חסם עליון של תת הקבוצה B אם x הוא חסם מלעיל של B וכן לכל חסם מלעיל אחר y של B מתקיים $x < y$. ההגדרה של חסם תחתון הינה בדומה.)

5. נתבונן בקבוצת המספרים הממשיים R עם יחס הסדר הרגיל. תהי $f : R \to R$ איזומורפיזם (ביחס לסדר הרגיל). הוכח, כי f היא פונקציה רציפה.

תאריך ההגשה: 30.3.2005